Outils proba-stat pour l'ingénierie math. et l'IA

Yiye Jiang

Chapitre 3

Variables aléatoires réelles à densité

1. Variables aléatoires à densité
   - Définitions et propriétés
   - Lois usuelles
2. Fonction de répartition et transformations
   - Fonction de répartition
   - Exemples et transformations
3. Quantiles
4. Vecteurs aléatoires à densité

Plan

1. Variables aléatoires à densité
   - Définitions et propriétés
   - Lois usuelles
2. Fonction de répartition et transformations
   - Fonction de répartition
   - Exemples et transformations
3. Quantiles
4. Vecteurs aléatoires à densité

Plan

1. Variables aléatoires à densité
   - Définitions et propriétés
   - Lois usuelles
2. Fonction de répartition et transformations
   - Fonction de répartition
   - Exemples et transformations
3. Quantiles
4. Vecteurs aléatoires à densité

Rappel — Définition 3.1 : variable aléatoire

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_\Omega)$ un espace probabilisé et $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. Une application $X : \Omega \longrightarrow E$ est une **variable aléatoire** si elle est mesurable, c'est-à-dire si

$$\boxed{\forall B \in \mathcal{E}, \quad X^{-1}(B) \in \mathcal{A}.}$$

Définition 3.2 — Variable aléatoire réelle

Dans le cadre de la **définition 3.1**, si l'espace mesurable d'arrivée est

$$\boxed{\Big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\Big),}$$

alors la variable aléatoire X est appelée **variable aléatoire réelle**.

- $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la **tribu borélienne** de $\mathbb{R}$: elle contient notamment tous les intervalles de $\mathbb{R}$.

Définition 3.3 — Variable aléatoire réelle à densité

Soient X une variable aléatoire réelle de loi $\mathbb{P}_X$. On dit que X **admet une densité** $p : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ si

$$\forall b \in \mathbb{R}, \qquad \mathbb{P}_\Omega\Big(X \leq b\Big) = \int_{-\infty}^{b} p(t)\,\mathrm{d}t. \tag{3.1}$$

Définition 3.3 — Variable aléatoire réelle à densité

Soient X une variable aléatoire réelle de loi $\mathbb{P}_X$. On dit que X **admet une densité** $p : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ si

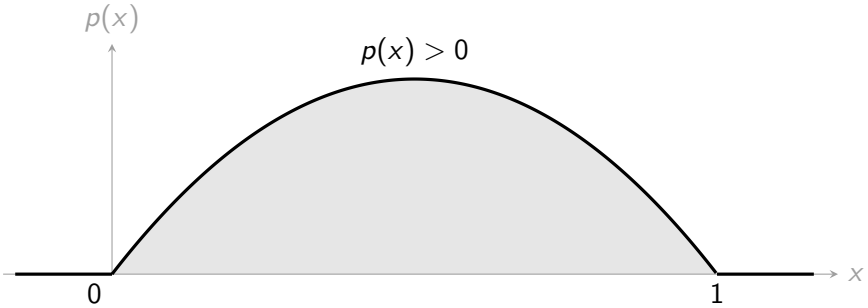
$$\boxed{\forall b \in \mathbb{R}, \qquad \mathbb{P}_\Omega\Big(X \leq b\Big) = \int_{-\infty}^{b} p(t)\,\mathrm{d}t.} \tag{3.1}$$

Puisque modifier une densité sur un **ensemble de mesure nulle** ne change pas les intégrales, donc la densité n'est pas unique, et on a :

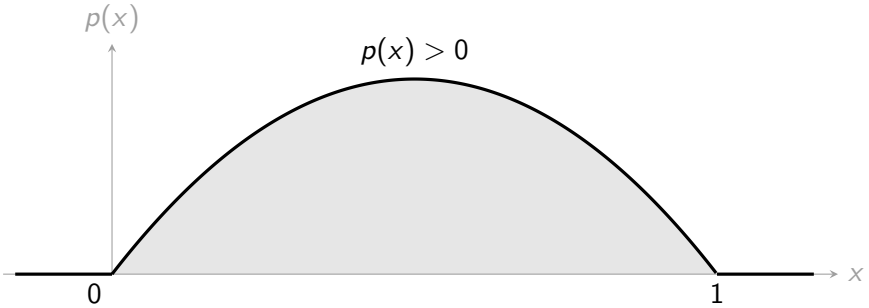
$$p_1(x) = p_2(x), \ \textit{presque partout}.$$

Il suffit donc de définir la densité p_X presque partout. Sur l'ensemble négligeable restant, on peut lui attribuer des valeurs arbitraires (par exemple 0), sans modifier la loi de X.

Considérons $X \sim \mathrm{Beta}(2, 2)$, de densité :

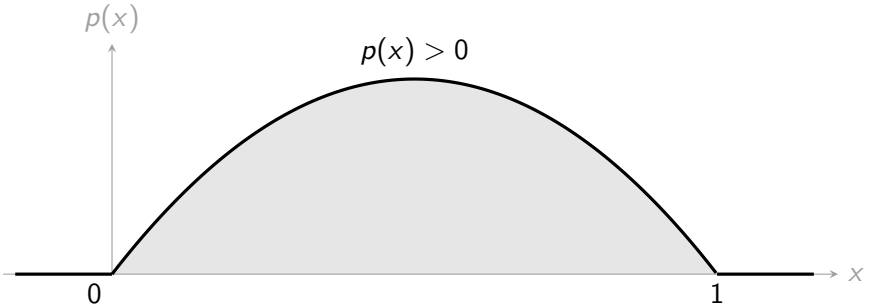


Considérons $X \sim \mathrm{Beta}(2,2)$, de densité :



Ensemble de positivité : $S_p =]0,1[$, car $p(0) = p(1) = 0$.

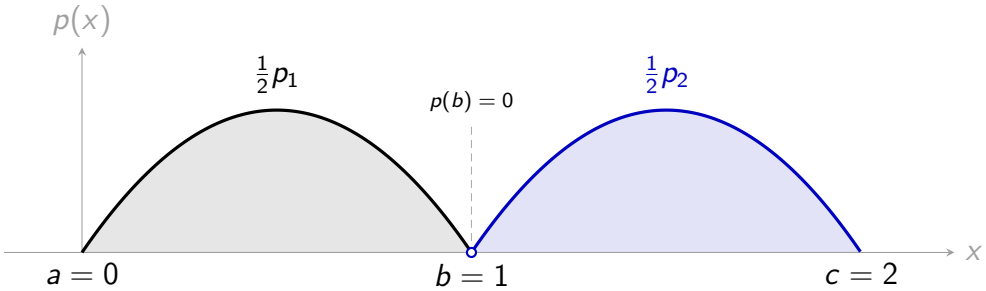
Considérons $X \sim \mathrm{Beta}(2,2)$, de densité :



Ensemble de positivité : $S_p =]0,1[$, car $p(0) = p(1) = 0$. **Support :** $\mathrm{supp}(p) = \overline{S_p} = [0,1]$.

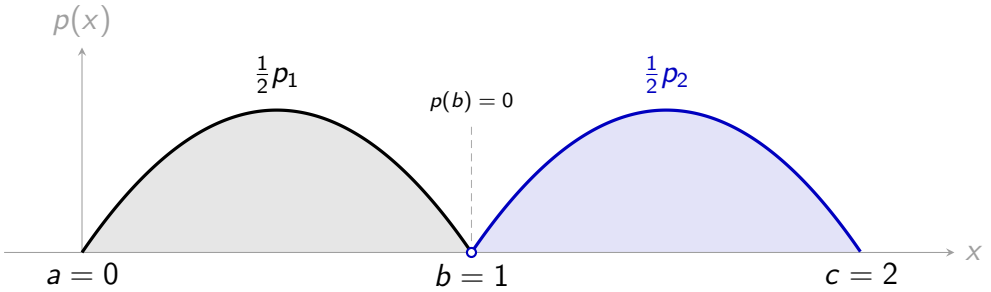
On considère la mélange à parts égales de deux betas notés p_1, p_2 :

$$\boxed{p(x) = \frac{1}{2}p_1(x) + \frac{1}{2}p_2(x).}$$



On considère la mélange à parts égales de deux betas notés p_1, p_2 :

$$\boxed{p(x) = \frac{1}{2}p_1(x) + \frac{1}{2}p_2(x).}$$



Ensemble de positivité : $S_p =]0, 1[\cup]1, 2[$.
Support : $\text{supp}(p) = \overline{]0, 1[\cup]1, 2[} = [0, 2]$.

Définition 3.4 — Support de la densité

Soit p une densité de X. On note

$$S_p = \left\{ x \in \mathbb{R} \,;\; p(x) > 0 \right\}$$

son **ensemble de positivité**.
Le **support de la densité** p est l'adhérence de cet ensemble :

$$\boxed{\text{supp}(p) = \overline{S_p} = \overline{\{x \in \mathbb{R} :\; p(x) > 0\}}.}$$

Définition générale — Support d'une variable aléatore

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X$. Le **support de** X est défini par

$$\boxed{\text{supp}(\mathbb{P}_X) = \overline{\{x \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}_X(]x-\varepsilon, x+\varepsilon[) > 0\}}.}$$

Proposition 3.1 — Positivité et normalisation

Une **densité de probabilité** est une fonction mesurable **non négative** d'**intégrale égale à** 1 :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ p(x) \geq 0, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathrm{supp}(p)} p(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Proposition 3.2

Si X admet la densité p, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\mathbb{P}_X(\{x\}) = 0.}$$

Proposition 3.2

Si X admet la densité p, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\mathbb{P}_X(\{x\}) = 0.}$$

Pour tous réels $a < b$, on a donc

$$\boxed{\mathbb{P}_X(]a,b[) = \mathbb{P}_X([a,b[) = \mathbb{P}_X(]a,b]) = \mathbb{P}_X([a,b]) = \int_a^b p(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Les extrémités d'un intervalle ayant une probabilité nulle, leur présence ou leur absence ne change pas sa probabilité..

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\{X = x\} \subseteq \{x - \tfrac{1}{n} < X \leq x\}.$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\{X = x\} \subseteq \{x - \tfrac{1}{n} < X \leq x\}.$$

Par monotonie de la probabilité et par l'équation (3.1),

$$0 \leq \mathbb{P}_X(\{x\}) \leq \mathbb{P}_X\Big(\,]x - \tfrac{1}{n}, x]\Big) = \int_{x-1/n}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t.$$

L'intégrale tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Par encadrement,

$$\boxed{\mathbb{P}_X(\{x\}) = 0.}$$

Par σ-additivité, $\mathbb{P}_X(D) = \sum_{x \in D} \mathbb{P}_X(\{x\}) = 0$ pour tout D dénombrable.

Soit $c \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $p_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$p_c(x) = \begin{cases} c^2 x + c\left(1 - \dfrac{3x}{2}\right), & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Questions.

1. Déterminer la valeur de c telle que p_c soit une densité ?
2. Calculer $\mathbb{P}(X \leq 1)$ à partir de la densité obtenue.
3. Quelles sont les valeurs de $\mathbb{P}(X = 1)$ et $\mathbb{P}(X < 1)$?

Correction

La condition de normalisation donne

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^2 \left[c^2 x + c\left(1 - \frac{3x}{2}\right) \right] \mathrm{d}x \\ &= 2c^2 - c. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$(2c+1)(c-1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{c = 1 \text{ ou } c = -\frac{1}{2}}.$$

- Si $c = -\frac{1}{2}$, alors $p_c(x) = x - \frac{1}{2} < 0$ pour $0 \leq x < \frac{1}{2}$: **valeur rejetée**.
- Si $c = 1$, alors $p_c(x) = 1 - \frac{x}{2} \geq 0$ pour $x \in [0, 2]$.

Donc

$$\boxed{c = 1}, \qquad \boxed{\mathrm{supp}(p_c) = [0, 2]}.$$

Plan

1. Variables aléatoires à densité
   - Définitions et propriétés
   - Lois usuelles
2. Fonction de répartition et transformations
   - Fonction de répartition
   - Exemples et transformations
3. Quantiles
4. Vecteurs aléatoires à densité

Définition — Loi uniforme $\mathcal{U}([a,b])$

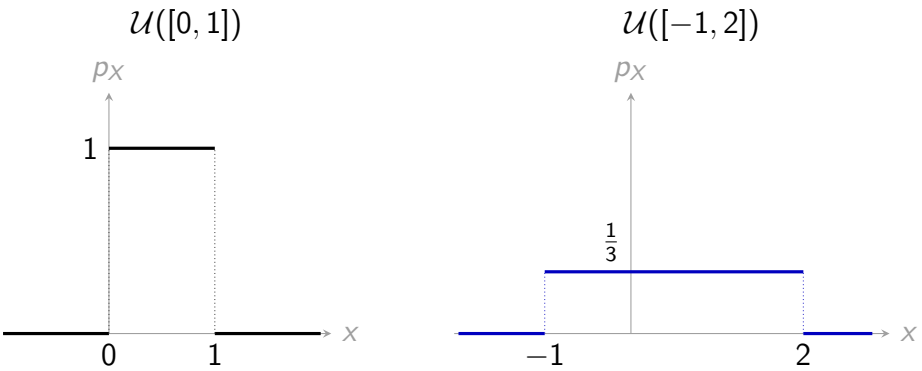
Paramètres : $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.

On dit que $X \sim \mathcal{U}([a,b])$ si X admet la densité

$$p_X(x) = \frac{1}{b-a}\,\mathbf{1}_{[a,b]}(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Support : $\mathrm{supp}(p_X) = [a,b]$.

Loi uniforme — Effet des paramètres



Plus l'intervalle est large, plus la hauteur $1/(b-a)$ est faible : **l'aire sous la densité reste égale à 1.**

Définition — Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$

Paramètre : $\lambda > 0$.

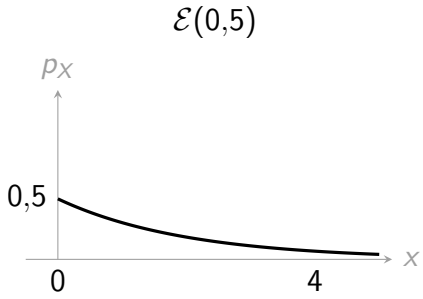
On dit que $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ si X admet la densité

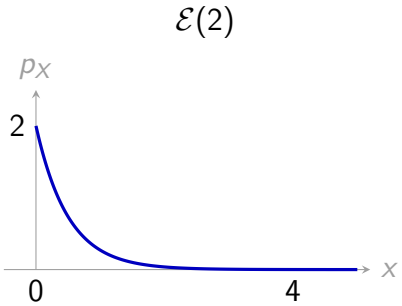
$$\boxed{p_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x), \qquad x \in \mathbb{R}.}$$

Support : $\mathrm{supp}(p_X) = [0, +\infty[$.

Application. Temps d'attente avant une panne (ou un incident).

Loi exponentielle — Effet du taux





Pour tout $\lambda > 0$, la hauteur au voisinage de 0 est λ, mais l'aire totale de la courbe vaut toujours 1.

Définition — Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

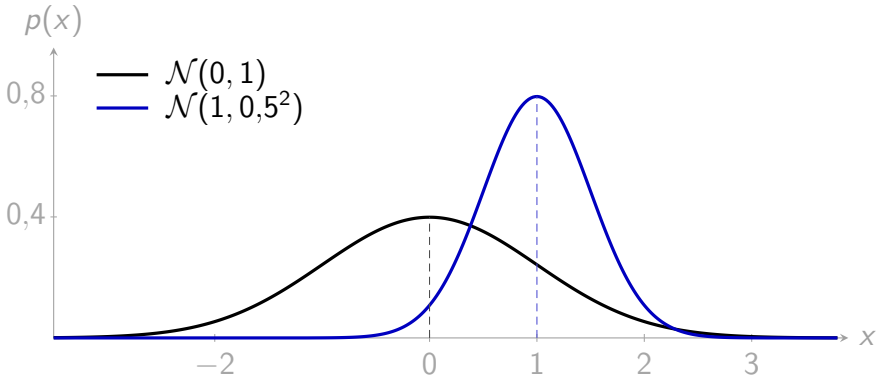
Paramètres : $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$; σ^2 est le paramètre de variance.

On dit que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si X admet la densité

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Support : $\mathrm{supp}(p_X) = \mathbb{R}$.

Loi normale — Effet de μ et de σ



La loi rouge est **décalée vers la droite** ($\mu = 1$) et **plus concentrée** ($\sigma = 0{,}5$) que la loi bleue.
Chaque courbe a une aire totale égale à 1.

Les densités de ces trois lois classiques et leurs supports sont à connaître par cœur.

Définition — Mélange gaussien à K composantes

Cette partie est pas demandée dans le cadre de ce cours. **Paramètres :** $K \geq 2$, $\pi_k > 0$, $\sum_{k=1}^{K} \pi_k = 1$, $\mu_k \in \mathbb{R}$, $\sigma_k > 0$. Chaque p_k est la densité de $\mathcal{N}(\mu_k, \sigma_k^2)$.
La densité du **mélange gaussien** est

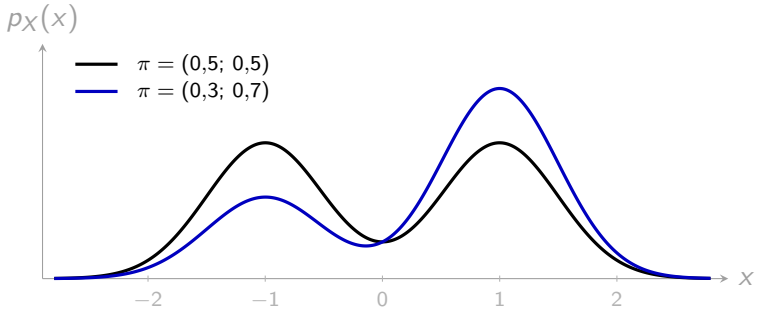
$$p_X(x) = \sum_{k=1}^{K} \pi_k p_k(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Support : $\mathrm{supp}(p_X) = \mathbb{R}$.

Application — Classification générative. π_k représente la proportion de la classe k et la k-ième normale modélise les observations de cette classe.

Mélange gaussien — Influence des proportions

Même deux composantes $\mathcal{N}(-1, 0{,}5^2)$ et $\mathcal{N}(1, 0{,}5^2)$, mais des poids différents.



On peut obtenir plusieurs pics : une loi de mélange n'est pas, en général, elle-même une loi normale.

Cette partie est pas demandée dans le cadre de ce cours.

Autres lois usuelles

Loi	**Densité $p_X(x)$**	**Application en modélisation bayésienne**
Bêta	$\frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}, \quad 0<x<1$	Prior du paramètre p de *Bernoulli*(p).
Gamma	$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}, \quad x>0$	Prior du paramètre λ de *Poisson*(λ) ou de $\exp(\lambda)$.
Gamma inverse	$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{-\alpha-1}e^{-\beta/x}, \quad x>0$	Prior du paramètre σ^2 de $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$.

$\alpha, \beta > 0$; dans la loi Gamma, β est un taux. Les densités sont nulles hors des domaines indiqués.

Autres lois usuelles

Loi	**Densité** $p_X(x)$	**Application**
Student t_ν	$\dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma(\nu/2)}\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}$	Test d'une moyenne, variance inconnue.
Khi-deux χ^2_ν	$\dfrac{x^{\nu/2-1}e^{-x/2}}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)},\ x>0$	Adéquation, indépendance.
Fisher F_{ν_1,ν_2}	$\dfrac{(\nu_1/\nu_2)^{\nu_1/2}x^{\nu_1/2-1}}{\mathrm{B}(\nu_1/2,\nu_2/2)(1+\nu_1 x/\nu_2)^{(\nu_1+\nu_2)/2}},\ x>0$	Comparaison de variances, ANOVA.

$\nu, \nu_1, \nu_2 > 0$;
$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$; $\mathrm{B}(a,b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$.

Plan

1. Variables aléatoires à densité
   - Définitions et propriétés
   - Lois usuelles
2. Fonction de répartition et transformations
   - Fonction de répartition
   - Exemples et transformations
3. Quantiles
4. Vecteurs aléatoires à densité

Plan

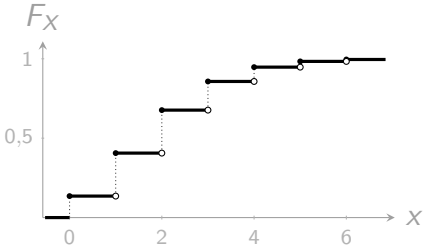
1. Variables aléatoires à densité
   - Définitions et propriétés
   - Lois usuelles
2. Fonction de répartition et transformations
   - Fonction de répartition
   - Exemples et transformations
3. Quantiles
4. Vecteurs aléatoires à densité

Définition 3.5 — Fonction de répartition

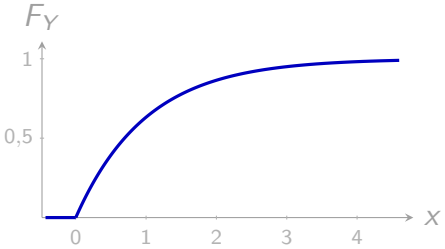
Soit X une variable aléatoire réelle, de loi $\mathbb{P}_X$, qui n'admet pas nécessairement une densité. Sa fonction de répartition est l'application

$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1], \qquad F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}_X(]-\infty, x]).$$

Loi de Poisson $\mathcal{P}(2)$



Loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$



Proposition 3.3 — Propriétés de F_X

Pour toute variable aléatoire réelle X :

1. F_X est **croissante** et à valeurs dans $[0, 1]$;
2. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$;
3. F_X est **continue à droite** en tout point :
   $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{h \to 0^+} F_X(x + h) = F_X(x)$.

Proposition 3.5 — De la densité à la répartition

Si X possède une densité p_X, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(t)\,\mathrm{d}t.}$$

En particulier, F_X est **absolument continue** sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{F_X'(x) = p_X(x), \quad \text{presque partout}}.$$

Rappelons nous d'où vient *p.p.* ?
Modifier les valeurs de $p_X(t)$ sur un ensemble de mesure nulle de points t ne change pas les intégrales.

Plan

1. Variables aléatoires à densité
   - Définitions et propriétés
   - Lois usuelles
2. Fonction de répartition et transformations
   - Fonction de répartition
   - Exemples et transformations
3. Quantiles
4. Vecteurs aléatoires à densité

Exemple 3.2.7. Soit $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, avec $\lambda > 0$.

1. À partir de la densité $p_X(x) = \lambda e^{-\lambda t} \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$, calculer $F_X(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. On pose $Y_1 = (X-1)^3$. Déterminer le support de Y_1. Justifier que Y_1 est une variable aléatoire. Calculer la densité de Y_1 .
3. On pose $Y_2 = X(2-X)$. Déterminer le support de Y_2. Justifier que Y_2 est une variable aléatoire. Calculer la densité de Y_2 pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Exemple 3.2.8. (généralisation)

Soit X une v. a. r. admettant une densité p_X, de support $[a, b]$.

Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, telle que

$$\boxed{\gamma'(x) \neq 0 \quad \text{pour tout } x \in [a, b].}$$

On définit $Y = \gamma(X)$.

1. On suppose que γ est strictement croissante.

1. Justifier que Y est une variable aléatoire. Déterminer le support de p_Y avec
$$\text{supp}(\mathbb{P}_Y) = \overline{\gamma(\text{supp}(\mathbb{P}_X))}.$$
2. En déduire une expression de p_Y sur son support.
3. Peut-on affaiblir l'hypothèse $\gamma'(x) \neq 0$ pour tout $x \in S_X$? Proposer une condition suffisante assurant que Y admet une densité.

2. On suppose maintenant que γ est strictement décroissante.

1. Justifier que Y est une variable aléatoire. Déterminer le support de p_Y.
2. En déduire une expression de p_Y sur son support.
3. Peut-on affaiblir l'hypothèse $\gamma'(x) \neq 0$ pour tout $x \in S_X$? Proposer une condition suffisante assurant que Y admet une densité.

3. On suppose seulement γ est strictement monotone.

1. Déterminer le support de p_Y.
2. En déduire une expression de p_Y sur son support.
3. Peut-on affaiblir l'hypothèse $\gamma'(x) \neq 0$ pour tout $x \in S_X$? Proposer une condition suffisante assurant que Y admet une densité.

On vient de montrer cette proposition :)

Proposition — Densité de $\gamma(X)$

Soit X une variable aléatoire réelle à densité p_X, de support $S_X = \text{supp}(\mathbb{P}_X)$. On considère

$$Y = \gamma(X), \qquad \gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Supposons que

$$\boxed{\gamma \in C^1(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \lambda\Big(\{x \in S_X : \gamma'(x) = 0\}\Big) = 0.}$$

Alors Y **admet une densité**.

Théorème — Condition nécessaire et suffisante

Soit X une variable aléatoire réelle, de fonction de répartition F_X.
Alors

$$\boxed{X \text{ admet une densité} \iff F_X \text{ est absolument continue sur } \mathbb{R}.}$$

Dans ce cas, une densité de X est donnée par

$$\boxed{p_X(x) = F_X'(x) \quad \text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}.}$$

Plan

1. Variables aléatoires à densité
   - Définitions et propriétés
   - Lois usuelles
2. Fonction de répartition et transformations
   - Fonction de répartition
   - Exemples et transformations
3. Quantiles
4. Vecteurs aléatoires à densité

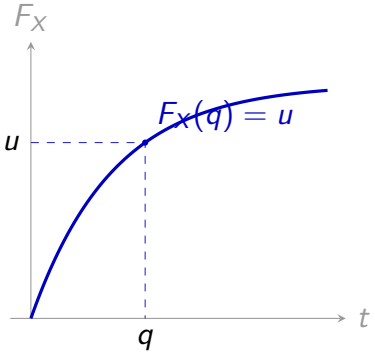
Définition 3.6 — Quantile d'ordre u

Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F_X. Pour $u \in]0,1[$, on définit le **quantile d'ordre** u par

$$\boxed{Q_X(u) = \inf\Big\{x \in \mathbb{R} : \ F_X(x) \geq u\Big\}.}$$

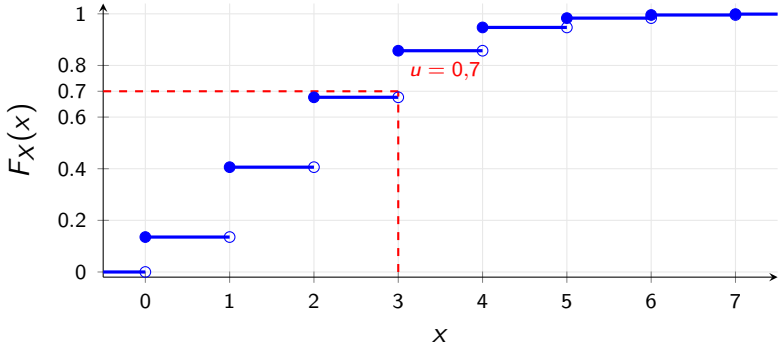
Il s'agit de l'**inverse généralisée à gauche** de F_X.

Quantile et répartition — Cas strictement croissant



$$\boxed{Q_X(u) = F_X^{-1}(u)}$$

Soit $X \sim \mathcal{P}(2)$. On cherche $Q_X(0{,}7) = \inf\{k : F_X(k) \geq u\}$.



Exemple (facultatif)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles de fonctions de répartition respectives F_X et F_Y, supposées continues et strictement croissantes sur $\mathbb{R}$. On note Q_X et Q_Y leurs fonctions quantiles.

Questions.

1. On définit la transformation $T(x) = Q_Y(F_X(x))$. Déterminer la fonction de répartition de $T(X)$.

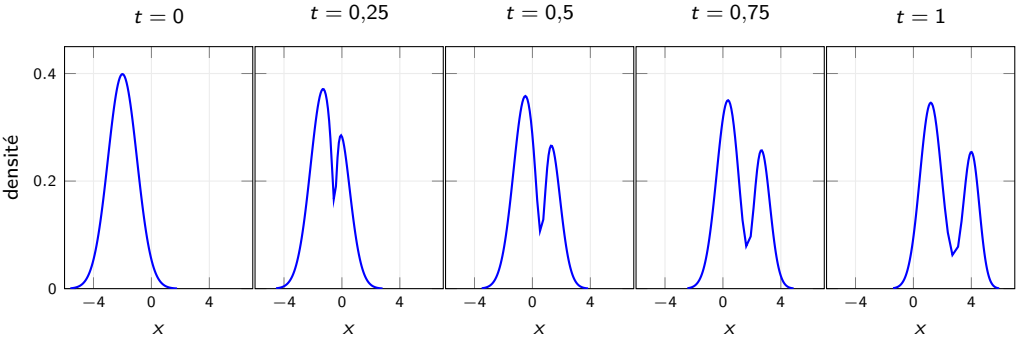
2. On considère la transformation identité $I(x) = x$. Quelle est la loi de $I(X)$?

3. Pour $t \in [0, 1]$, on définit

$$\boxed{T_t(x) = (1-t)x + tT(x), \qquad Z_t = T_t(X).}$$

Quelle loi correspond à $T_t(X)$?

Évolution d'une gaussienne vers un mélange gaussien



Interpolation des lois s'effectue en interpolant les transformations (*La théorie de l'espace de Wasserstein*).

Quand t représente le temps, on a un trajectoire de lois.

Interpolation linéaire des densités ?

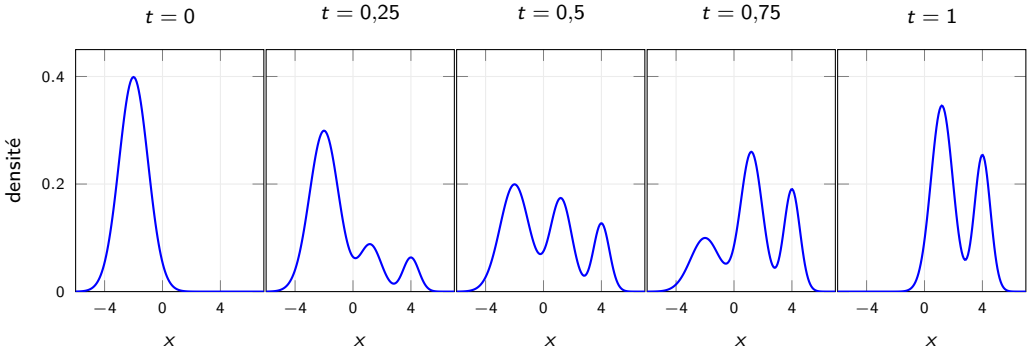
Si l'on passe pas par l'interpolation des transformations

$$p_t = (1-t)p_0 + t\,p_1, \qquad t \in [0,1].$$

Interpolation linéaire des densités ?

Si l'on passe pas par l'interpolation des transformations

$$p_t = (1-t)p_0 + t\,p_1, \qquad t \in [0,1].$$



Supposons que l'on souhaite modéliser la formation de deux groupes chez une population avec cette trajectoire de lois. L'interpolation "euclidienne" décrit-elle un dynamique réaliste ?

Plan

1. Variables aléatoires à densité
   - Définitions et propriétés
   - Lois usuelles
2. Fonction de répartition et transformations
   - Fonction de répartition
   - Exemples et transformations
3. Quantiles
4. Vecteurs aléatoires à densité

Définition : vecteur aléatoire réel

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_\Omega)$ un espace probabilisé et $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable.
Une application $X : \Omega \longrightarrow E$ est une **variable aléatoire** si elle est mesurable.
Si $(E, \mathcal{E})$ est

$$\boxed{\left(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\right),}$$

alors $X = (X_1, \ldots, X_n)$ est appelée **vecteur aléatoire réel de dimension** n.

Définition — Vecteur aléatoire réel à densité

Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire réel de loi $\mathbb{P}_X$.
On dit que X **admet une densité** $p_X : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty[$ si

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbb{P}_X(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} p_X(t_1, \ldots, t_n) \, \mathrm{d}t_n \cdots \mathrm{d}t_1.$$

p_X est appelée **densité conjointe** des $X_1, \ldots, X_n$.

Définition — Vecteur aléatoire réel à densité

Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire réel de loi $\mathbb{P}_X$.
On dit que X **admet une densité** $p_X : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty[$ si

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbb{P}_X(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} p_X(t_1, \ldots, t_n) \, \mathrm{d}t_n \cdots \mathrm{d}t_1.$$

p_X est appelée **densité conjointe** des $X_1, \ldots, X_n$.

$\mathbb{P}_X(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n)$ – **fonction de répartition généralisé** en cas multivarié, notée par $F_X(x_1, \ldots, x_n)$, on a :

$$\frac{\partial^n F_X}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}(x_1, \ldots, x_n) = p_X(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{presque partout.}$$

** l'ordre des dérivation n'a pas d'importance (au sens de presque partout).*

Proposition : calcul d'une probabilité sur un domaine

Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire réel de densité p_X. Pour tout $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,

$$\boxed{\mathbb{P}_X(X \in D) = \int_D p_X(t_1, \ldots, t_n)\, \mathrm{d}(t_1, \cdots, t_n).}$$

En particulier, si $D = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ avec $a_i \leq b_i$ pour tout i, alors

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathbb{P}_\Omega(a_1 \leq X_1 \leq b_1, \ldots, a_n \leq X_n \leq b_n)\\ &\quad = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} p_X(t_1, \ldots, t_n)\, \mathrm{d}t_n \cdots \mathrm{d}t_1.\end{aligned}}$$

Par **Fubini–Tonelli**, l'intégrale sur un pavé se calcule par intégrations successives. Aucune hypothèse d'indépendance entre les composantes n'est nécessaire.

Exercice

On considère le couple (X, Y) de densité $f_{X,Y}(x, y) = e^{-(x+y)}\, \mathbf{1}_{\{x \geq 0,\, y \geq 0\}}$.

On souhaite calculer

$$\mathbb{P}((X, Y) \in D_2),\ D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x + y \leq 2,\ x \leq y\}$$

1. Montrer que $\mathbb{P}((X, Y) \in D_2) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x+y)}\, \mathbf{1}_D(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, avec $D = D_2 \cap [0, +\infty)^2$.
2. Montrer que
$$\mathbf{1}_D(x, y) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x)\, \mathbf{1}_{[x,\, 2-x]}(y).$$
3. Calculer la probabilité.

Définition : support de la densité

Soit p_X une densité sur $\mathbb{R}^n$. On note

$$S_{p_X} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ p_X(x) > 0 \right\}$$

son **ensemble de positivité**. Le **support de la densité** est

$$\boxed{\operatorname{supp}(p_X) = \overline{S_{p_X}}.}$$

Proposition : positivité et normalisation

Une densité p_X vérifie

$$\boxed{p_X(x) \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n), \qquad \int_{\mathbb{R}^n} p_X(x)\,\mathrm{d}x = 1.}$$

En particulier, $\int_{\operatorname{supp}(p_X)} p_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Proposition : changement de variables (facultatif)

Soit X un vecteur aléatoire de densité p_X portée par un ouvert $O \subset \mathbb{R}^d$. Soit $\varphi : O \to O'$ une bijection de classe C^1, d'inverse de classe C^1. Alors $Y = \varphi(X)$ admet pour densité

$$\boxed{p_Y(y) = \mathbf{1}_{\{y \in O'\}}\, p_X\Big(\varphi^{-1}(y)\Big)\, \Big|\det D\varphi^{-1}(y)\Big|.}$$

Le facteur jacobien (facultatif)

La matrice jacobienne de $\varphi^{-1} = (g_1, \ldots, g_d)$ est

$$D\varphi^{-1}(y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(y) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_d}(y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_d}{\partial y_1}(y) & \cdots & \frac{\partial g_d}{\partial y_d}(y) \end{pmatrix}, \qquad J(y) = \Big|\det D\varphi^{-1}(y)\Big|.$$

Densités marginales

Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ de densité jointe p_X. Pour obtenir la densité de $Y = (X_1, \ldots, X_k)$, on intègre sur les coordonnées restantes :

$$p_Y(x_1, \ldots, x_k) = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} p_X(x_1, \ldots, x_d)\, dx_{k+1} \cdots dx_d.$$

En particulier, pour un couple (X, Y) :

$$p_X(x) = \int_{\mathbb{R}} p_{X,Y}(x, y)\, dy, \qquad p_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} p_{X,Y}(x, y)\, dx.$$

Définition : indépendance par blocs

Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire de densité jointe p_X. On **regroupe ses n coordonnées** en m blocs non vides, par exemple :

$$B_1 = (X_1, \ldots, X_{k_1}),$$
$$B_2 = (X_{k_1+1}, \ldots, X_{k_2}), \quad \ldots, \quad B_m = (X_{k_{m-1}+1}, \ldots, X_n).$$

Les blocs $B_1, \ldots, B_m$ sont **mutuellement indépendants** si et seulement si

$$p_X(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{m} p_{B_j}(b_j).$$

Ici b_j regroupe les valeurs des coordonnées du bloc B_j, égalité presque partout.

Exercice : indépendance d'un couple gaussien

Soit (X, Y) un couple gaussien centré réduit, de coefficient de corrélation $\rho \in]-1, 1[$, dont la densité jointe est

$$p_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Questions

1. Montrer que les deux marginales sont $\mathcal{N}(0, 1)$, de densité

$$p_X(t) = p_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}.$$

2. Lorsque $\rho = 0$, simplifier $p_{X,Y}(x, y)$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Lorsque $\rho \neq 0$, comparer $p_{X,Y}(0, 0)$ et $p_X(0)p_Y(0)$. Que conclure ?

Exercice

Soit $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ de densité jointe

$$p_X(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2\mathbf{1}_{\{0<x_1<1\}}\mathbf{1}_{\{0<x_2<x_3<1\}}\mathbf{1}_{\{0<x_4<1\}}.$$

1. Quels groupes de variables aléatoires sont indépendants ?
2. X_2 et X_3 sont-elles indépendantes ?

Définition : densité conditionnelle

Soit (X, Y) un couple de densité jointe $p_{X,Y}$ et de densité marginale p_Y. Pour y tel que $p_Y(y) > 0$, la **densité conditionnelle** de X sachant $Y = y$ est

$$p_{X|Y=y}(x) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)}.$$

Si $p_Y(y) = 0$, on peut choisir $p_{X|Y=y} = p_X$ par convention.

Exemple : densité conditionnelle d'un couple gaussien

Reprenons le couple (X, Y), avec $\rho \neq 0$:

$$p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right), \qquad p_Y(y) = \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Par la formule $p_{X|Y=y}(x) = p_{X,Y}(x,y)/p_Y(y)$, on obtient

$$\boxed{p_{X|Y=y}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left(-\frac{(x-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}\right).}$$